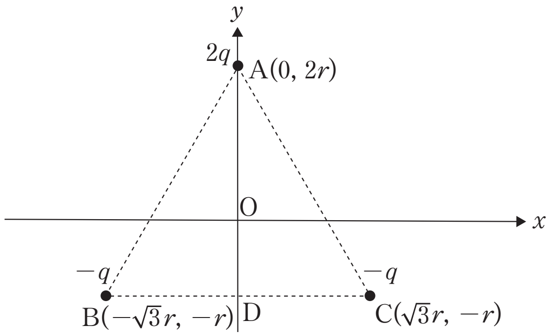
第33講　電場と電位2

1

図のように，$x-y$ 平面上の点A$(0,\ 2r)$に電気量$2q$ $(q>0)$の点電荷，点B$\left(-\sqrt{3}\,r,\ -r\right)$に電気量 $-q$ の点電荷，点C$\left(\sqrt{3}\,r,\ -r\right)$に電気量 $-q$ の点電荷を固定した。クーロンの法則の比例定数を k として，下の問に答えよ。



(1)　原点Oでの電界の y 成分は，$k\dfrac{q}{r^2}$の何倍か。正しいものを，次の①〜⑧のうちから一つ選べ。

① $-\dfrac{1}{4}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{3}{4}$　④ -1

⑤ $-\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$　⑦ $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$　⑧ $-\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$

(2)　2点B，Cをむすぶ線分BCの中点をDとする。原点Oから点Dまで電気量 $-q$ の電荷を動かすのに必要な仕事は，$k\dfrac{q^2}{r}$の何倍か。正しいものを，次の①〜⑧のうちから一つ選べ。

① $\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$　② $\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}$　⑥ $\dfrac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}$　⑦ $\dfrac{2}{3}$　⑧ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

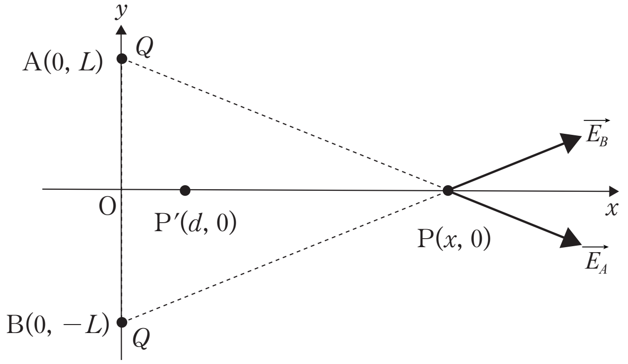
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

図のように2個の点電荷 Q [C]（$Q>0$）を y 軸上の点A(0, L)とB(0, $-L$)に固定した。ただし，長さの単位は [m] とする。クーロンの法則の比例定数を k として，電位の基準を無限遠に選び重力の影響は無視する。



問1

点Aの電荷 Q が，x 軸上の点P(x, 0)に作る電位および電界をそれぞれ V_A [V] および $\vec{E_A}$ [V/m] とする。点P(x, 0)は，両電荷からの距離が等しいので，$V_A=V_B=$ [あ] [V] であり，$|\vec{E_A}|=|\vec{E_B}|=$ [い] [V/m] である。したがって，点Pの電位は $V=V_A+V_B=$ [う] [V] であり，電界は $\vec{E}=\vec{E_A}+\vec{E_B}$ で表される。電界 $\vec{E}$ の x 成分を E_x，y 成分を E_y とすると，$E_x=$ [え] [V/m]，$E_y=$ [お] [V/m] である。

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問2

点Pに質量 m [kg]，電荷 $-q$ [C]（$q>0$）をもつ荷電粒子がある場合を考える。ただし，この荷電粒子は x 軸上をなめらかに動くものとする。この荷電粒子は，静電気力による位置エネルギー［か］[J] を持つ。いま，点Pが $\left(\sqrt{3}L,\ 0\right)$ のとき，この荷電粒子は速度 v_0 [m/s] で x 軸の正方向に運動しているとする。このときの，運動エネルギーと位置エネルギーの和は，［き］[J] で与えられる。荷電粒子の位置および速度をそれぞれ x [m]，および v [m/s] としたとき，エネルギー保存の法則を式で表すと［く］となる。この荷電粒子が再び点Pへ戻ってこないためには，$v_0 \geqq$［け］[m/s] でなければならない。

問3

次に，この荷電粒子を位置P′で静かにはなした場合を考える。前問と同様に荷電粒子は x 軸上をなめらかに動くものとする。速度 v および位置 x を用いてエネルギー保存の法則を表すと，［こ］となる。ここで，荷電粒子をはなした点P′が原点Oに十分に近く $|d| \ll L$ が成立する場合には，荷電粒子は単振動を行う。これを示すために，エネルギー保存の法則［こ］に，近似式，

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \fallingdotseq \frac{1}{a}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\} \qquad ただし，a^2 \gg b^2，a>0$$

を適用する。その結果を，ばね定数 K [N/m] のばねに接続された質量 m [kg] の質点のエネルギー保存の法則とみなすと，つりあいの位置は $x=$［さ］[m]，ばね定数は，$K=$［し］[N/m] と求められる。これより，荷電粒子の運動の周期は［す］[s] であることがわかる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

静電気力に対するクーロンの法則を理解し応用するために，電気力線の概念は有用である。
- 電気力線は電場（電界）の方向に沿って描かれ，電場と同じ向きをもつ。
- 電場の向きに垂直な単位面積を通過する電気力線の本数で，電場の大きさ E が表される。

この電気力線は以下の性質をもつ。

- 正電荷の集まりから出ていく電気力線の本数 N は，電荷の総量を Q とするとき，$N=4\pi k_0 Q$ である。一方，電荷の総量が $-Q$ である負電荷の集まりには，同じ本数 N の電気力線が入っていく。（ただし，$k_0=9\times10^9$ [$\mathrm{Nm^2/C^2}$] である。）
- 電気力線は正電荷から出て負電荷に入り，途中で枝分かれしたり交わったりしない。近くに負電荷が不足している場合には，電気力線の一部は無限遠に向かい，逆に正電荷が不足している場合には，電気力線の一部は無限遠からやって来る。
- これらのことは，点電荷の場合だけでなく，広がりのある電荷分布に対しても一般的に成り立つ。

これらのことを考慮して，以下の問に答えよ。

(A)　半径 R の球の内部に，正電荷が一様に分布している場合を考える。すなわち，単位体積あたりの電気量が一定値 ρ となるように，電荷が球全体に分布している（図1）。この場合の電気力線を求めよう。電荷の分布が球対称であるから，電気力線の向きは球の表面に垂直となり，放射状に広がる。また，球の近くには負電荷がないとすると，電気力線は球の外側に向かって無限遠まで伸びる。

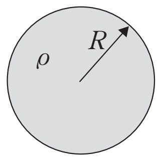


図1

(1)　この球の外側での電気力線を図示せよ。

(2)　球から出ていく電気力線の総本数 N はいくらか。

(3)　中心から距離 r（$r\geqq R$）での電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(B)　次に，内径 R，外径 R' の2つの球に囲まれた部分（球殻）に，正電荷が(1)と同じく単位体積あたりの電気量が一定値 ρ となるように，一様に分布している場合を考える（図2）。

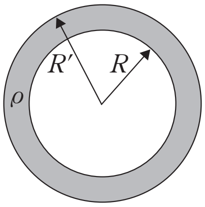


図2

(1)　中心からの距離を r としたとき，球殻の内側($r<R$)と外側($r>R'$)での電気力線を図示せよ。

(2)　球殻の内側($r<R$)と外側($r>R'$)での電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

(C)　(A)の球を(B)の半径 R の空洞部分にはめ込むと，正電荷が一様な密度 ρ で分布している半径 R' の球になる（図3）。このとき，中心から距離 R における電場の大きさ $E(R)$ を求めよ。

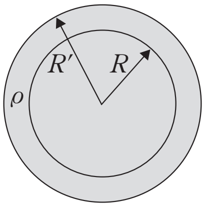


図3

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講　確認テスト

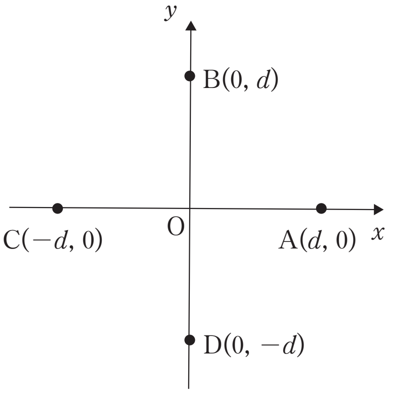
次の文中の［ア］～［ク］に最も適するものをそれぞれの解答群から一つ選びなさい。ただし，クーロンの法則の比例定数をkとする。また，電位の基準を無限遠にとる。

平面上に図のようにx軸，y軸をとり，x軸上の点A$(d,\ 0)$に電気量Qの正電荷を置いた。dとQは，どちらも正である。このとき，y軸上の点B$(0,\ d)$に作られる電場（電界）の大きさは［ア］であり，向きは［イ］である。

点Aと点C$(-d,\ 0)$に電気量Qの正電荷を置くと，点Bに作られる電場の大きさは［ウ］であり，向きは［エ］である。また，点Bでの電位は［オ］である。

次に，点Aと点Cに電気量Qの正電荷を固定し，さらに点Bに電気量$-Q$の負電荷を固定する。このとき，無限遠にある電気量$-Q$の負電荷がy軸上の点D$(0,\ -d)$まで移動するあいだに電場がする仕事は［カ］である。

最後に，点Aと点Cに電気量Qの正電荷を固定し，点Bと点Dに電気量$-Q$の負電荷を固定する。電位が正の等電位線を実線で，電位が負の等電位線を点線で描くと，この平面内での等電位線は［キ］のようになる。したがって，x軸上をなめらかに動くことができる正電荷を持った荷電粒子を点$(d_1,\ 0)$に置き（ただし，$0 < d_1 < d$），静かに放すと，粒子は［ク］。



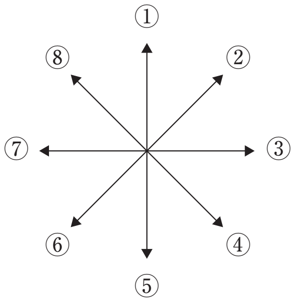
［ア］の解答群

① $k\dfrac{Q}{d}$　② $k\dfrac{Q}{d^2}$　③ $k\dfrac{Q^2}{d}$　④ $k\dfrac{Q^2}{d^2}$

⑤ $k\dfrac{Q}{\sqrt{2}\,d}$　⑥ $k\dfrac{Q}{2d^2}$　⑦ $k\dfrac{Q^2}{\sqrt{2}\,d}$　⑧ $k\dfrac{Q^2}{2d^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[イ], [エ]の解答群



[ウ], [オ]の解答群

① $k\dfrac{2Q}{d}$　② $k\dfrac{\sqrt{2}\,Q}{d^2}$　③ $k\dfrac{2Q^2}{d}$　④ $k\dfrac{\sqrt{2}\,Q^2}{d^2}$

⑤ $k\dfrac{\sqrt{2}\,Q}{d}$　⑥ $k\dfrac{Q}{\sqrt{2}\,d^2}$　⑦ $k\dfrac{\sqrt{2}\,Q^2}{d}$　⑧ $k\dfrac{Q^2}{\sqrt{2}\,d^2}$

[カ]の解答群

① $-k\dfrac{Q^2}{2d}$　② $k\dfrac{Q^2}{2d}$

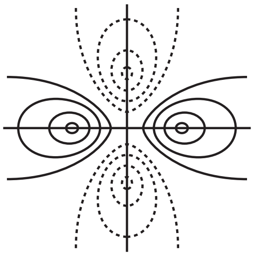
③ $-k\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{Q^2}{2d}$　④ $k\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{Q^2}{d}$

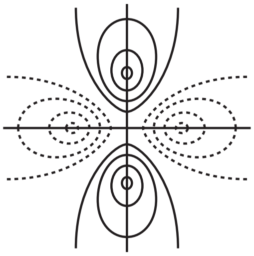
⑤ $-k\dfrac{3Q^2}{4d^2}$　⑥ $k\dfrac{3Q^2}{4d^2}$

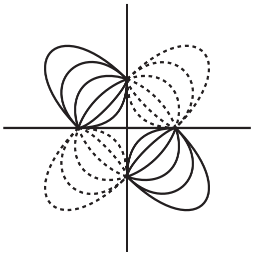
⑦ $-k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{Q^2}{d^2}$　⑧ $k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{Q^2}{d^2}$

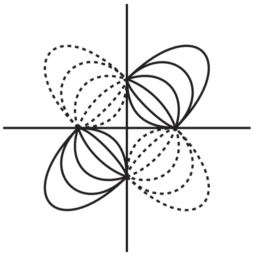
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

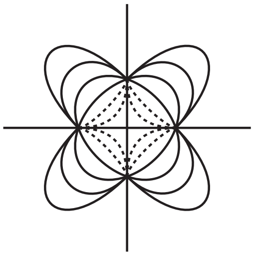
キ の解答群

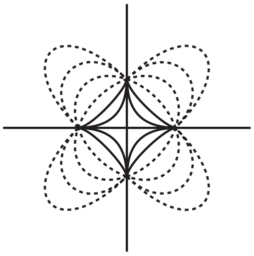
①


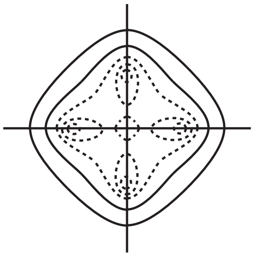
②


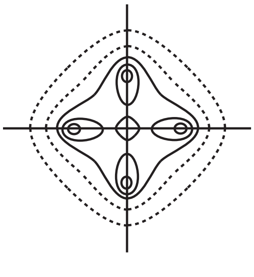
③


④


⑤


⑥


⑦


⑧


ク の解答群

① 静止したままである
② x 軸の負の方向に動きだし，その後，原点を中心にして x 軸上で往復運動する
③ x 軸の正の方向に動きだし，その後，原点を中心にして x 軸上で往復運動する
④ x 軸の負の方向に動きだし，その後，点$(d_1,\ 0)$を中心にして x 軸上で単振動する
⑤ x 軸の正の方向に動きだし，その後，点$(d_1,\ 0)$を中心にして x 軸上で単振動する
⑥ x 軸の負の方向に動きだし，そのまま x 軸上を負の方向に無限遠まで運動し続ける
⑦ x 軸の正の方向に動きだし，そのまま x 軸上を正の方向に無限遠まで運動し続ける

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　解答

1

(1)　③　　(2)　⑥

2

問 1　(あ)　$\dfrac{kQ}{\sqrt{x^2+L^2}}$　(い)　$\dfrac{kQ}{x^2+L^2}$　(う)　$\dfrac{2kQ}{\sqrt{x^2+L^2}}$　(え)　$\dfrac{2kQx}{(x^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}$

(お)　0

問 2　(か)　$-\dfrac{2kqQ}{\sqrt{x^2+L^2}}$　(き)　$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2-\dfrac{kqQ}{L}$

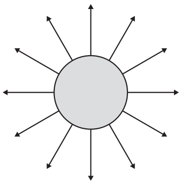
(く)　$\dfrac{1}{2}mv_0{}^2-\dfrac{kqQ}{L}=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{2kqQ}{\sqrt{x^2+L^2}}$　(け)　$\sqrt{\dfrac{2kqQ}{mL}}$

問 3　(こ)　$-\dfrac{2kqQ}{\sqrt{d^2+L^2}}=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{2kqQ}{\sqrt{x^2+L^2}}$

(さ)　0　(し)　$\dfrac{2kqQ}{L^3}$　(す)　$2\pi\sqrt{\dfrac{mL^3}{2kqQ}}$

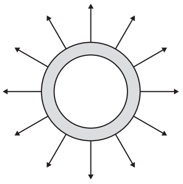
3

(A)　(1)



(2)　$\dfrac{16}{3}\pi^2\rho k_0R^3$　(3)　$\dfrac{4\pi\rho k_0R^3}{3r^2}$

(B)　(1)



(2)　$r<R$ では 0　　$r>R$ では $\dfrac{4\pi\rho k_0(R'^3-R^3)}{3r^2}$

(C)　$\dfrac{4\pi\rho k_0R}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講　確認テスト

【解答】

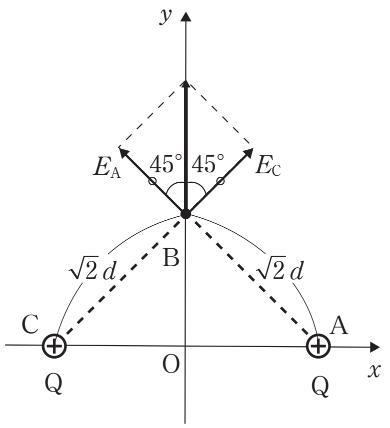
ア ⑥　イ ⑧　ウ ⑥　エ ①　オ ⑤

カ ④　キ ①　ク ②

【解説】

AB間の距離は $\sqrt{2}\,d$ ゆえ，点Aの電荷が点Bに作る電場の大きさ E_A は

$$E_A = k\frac{Q}{(\sqrt{2}\,d)^2} = \boldsymbol{\frac{kQ}{2d^2}}\ _{ア}\qquad（向きは⑧_{イ}）$$



同様に，点Cの電荷が点Bに作る電場の大きさも $\frac{kQ}{2d^2}$ ゆえ，点Bにできる合成電場 E は

$$E = E_A \times 2\cos 45^\circ = \frac{kQ}{2d^2}\times 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{kQ}{\sqrt{2}\,d^2}}\ _{ウ}$$

となり，向きは①$_{エ}$

点Bの電位 V_B は

$$V_B = k\frac{Q}{\sqrt{2}\,d} + k\frac{Q}{\sqrt{2}\,d} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}\,kQ}{d}}\ _{オ}$$

次に，AとCに正の，Bに負の電荷を固定したときの点Dの電位は

$$V_D = k\frac{Q}{(\sqrt{2}\,d)} + k\frac{Q}{(\sqrt{2}\,d)} + k\frac{(-Q)}{(2d)} = \left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{kQ}{d}$$

となり，無限遠から点Dまでの $(-Q)$ の電荷を運ぶ間に電場がした仕事 W_E は

$$W_E = \underbrace{(-Q)V_\infty - (-Q)V_D}_{位置エネルギーの差} = \boldsymbol{\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{kQ^2}{d}}\ _{カ}$$

キ　正電荷の近くでは電位は正，負電荷の近くでは電位は負となるので①$_{キ}$

ク　はじめは x 軸に沿って電位の低い方へ，すなわち x 軸の負の方へ動き出すが，点Cの正電荷に近づくにつれて位置エネルギーが高くなり，やがて止まる。その後，電荷は x 軸正の方へ運動し，点Aの近くで止まり，以後これをくり返す。②$_{ク}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。